Feuille de TD 5
Représentations des groupes

Sauf mention du contraire, tous les groupes sont finis et toutes les représentations sont des représentations complexes de dimension finie.

Exercice 1 (Passage au quotient)
Soient G un groupe fini et H un sous groupe distingué de G. On note $\pi\colon G \to G/H$ la projection canonique et soit ρ une représentation de G/H.

1. Montrer que $(V, \rho \circ \pi)$ est une représentation de G.
2. Donner le caractère de $(V, \rho \circ \pi)$ en fonction ce celui de (V, ρ).
3. Montrer que (V, ρ) est irréductible si est seulement si $(V, \rho \circ \pi)$ est irréductible.

Exercice 2 (Multiplication par un caractère)
Soit G un groupe fini, (V, ρ) une représentation de G et $\varepsilon\colon G \to \mathbb{C}^*$ un caractère (i.e une représentation de degré 1).

1. Montrer que $(V, \varepsilon\rho)$ définie par $(\varepsilon\rho)(g) = \varepsilon(g)\rho(g)$ pour tout $g \in G$ est une représentation de G.
2. Exprimer le caractère de $(V, \varepsilon\rho)$ en fonction de ε et du caractère de (V, ρ).
3. Montrer que ρ est irréductible si et seulement si $\varepsilon\rho$ est irréductible.

Exercice 3 (Représentation duale)
Soient G un groupe fini, et (V, ρ) une représentation de G. On note $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ le dual de V. On définit alors $\rho^*\colon E \to \mathrm{End}(V)$ pour $g \in G$ et $\varphi \in V^*$ par $\rho^*(g) \cdot \varphi = \varphi \circ \rho(g)^{-1}$.

1. Montrer que (V^*, ρ^*) défini une représentation.
2. Exprimer la caractère de (V^*, ρ^*) en fonction de celui de (V, ρ).
3. Montrer que $((V^*)^*, (\rho^*)^*)$ est isomorphe à (V, ρ).
4. Est-ce que (V^*, ρ^*) est isomorphe à (V, ρ) ? On pourra regarder les représentation d'un groupe cyclique.
5. Monter que (V, ρ) est irréductible si et seulement si (V^*, ρ^*) est irréductible.

Exercice 4 (Une caractérisation de la représentation régulière)
Soient G un groupe fini et (V, ρ) une représentation de G. On suppose qu'il existe $v \in V$ tel que $\{\rho(g)v \mid g \in G\}$ forme une base de V. Montrer que (V, ρ) est isomorphe à la représentation régulière.

Exercice 5 (Un contre exemple)
Soit D_8 le groupe des isométrie du carré et $\mathbb{H}_8$ le groupe des quaternion.

1. Établir la table de caractères de D_8.
2. Établir la table de caractères de $\mathbb{H}_8$.
3. Que remarquez vous ?

Exercice 6 (Table de caractère de Σ_4)
Donner la table de caractère du groupe symétrique Σ_4 (on pourra voir Σ_4 comme le groupe des isométries du cube).

Exercice 7 (table des caractère de D_n)
On note $D_{2n} = \langle r, s \mid r^n = s^2 = (rs)^2 = 1\rangle$ le groupe diédral d'ordre $2n$ (qu'on peut aussi voir comme le groupes des isométries du n-gone régulier en voyant r comme la rotation d'angle $2\pi/n$ et s une symétrie). Établir la table de caractères de D_{2n} (on pourra considérer les actions différentes de D_{2n} sur le n-gone régulier en envoyant r sur toutes les rotations possibles).

Exercice 8 (Représentations d'un produit)
Soient G et H deux groupes finis. Donner toutes les représentations irréductibles de $G \times H$ en fonction de celles de G et celles de H.

Exercice 9 (Décomposition de la représentation régulière)
Soient G un groupe fini, (V_G, ρ_G) sa représentation régulière et soit χ_G son caractère.

1. Montrer que $\chi_G(1) = |G|$ et que $\chi(g) = 0$ pour tout $g \in G \setminus \{0\}$.
2. Soit (W, ρ_W) une représentation irréductible de G. Montrer que W est une sous-représentation de (V_G, ρ_G) de multiplicité $\dim(W)$.
3. En déduire la décomposition de la représentation régulière en somme de représentations irréductibles.

Exercice 10 (Représentation de permutation et double transitivité)
Soient G un groupe fini, X un ensemble fini muni d'une action transitive de G, (V, ρ) la représentation de permutation associée (i.e. V admet une base $(e_x)_{x\in X}$ telle que $\rho_X(g) \cdot e_x = e_{g\cdot x}$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$) et χ_X son caractère. Soit

$$W = \left\{ \sum_{x\in X} \lambda_x e_x \mid \sum_{x\in X} \lambda_x = 0 \right\}.$$

1. Montrer que W induit une sous-représentation de (V, ρ).
2. Donner la représentation supplémentaire de W dans V.

On dit que G agit *doublement transitivement* sur X si pour toute paire de couple $(x_1, x_2) \in X^2$ et $(x'_1, x'_2) \in X^2$ il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x_1 = x'_1$ et $g \cdot x_2 = x'_2$.

3. Montrer que le caractère de la représentation de permutation associé à l'action diagonale de G sur $X \times X$ est égal à χ^2.
4. Monter que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (i) G agit doublement transitivement sur X,
   (ii) $\langle \chi^2, 1\rangle = 2$,
   (iii) W_X est irréductible.
5. En déduire que Σ_n avec $n \geq 2$ admet une représentation irréductible de degré $n! - 1$.
6. Que peut-on dire sur le groupe alterné ?